Unidad 3: DETERMINANTES.

1. Definición de Determinante para matrices cuadradas de orden 2 y de orden 3.

Un determinante es un número que se le asocia a toda matriz cuadrada.

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

El es producto de los elementos que están en la diagonal principal menos el producto de los elementos que están en la diagonal secundaria.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 7 = 18 - 28 = -10$	**b)** $\begin{vmatrix} -3 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - 1/2 \cdot (-2) = -3 + 1 = -2$
c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = -2 \cdot 12 - 4 \cdot (-6) = -24 + 24 = 0$	**d)** $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a \cdot a - 3 \cdot 4 = a^2 - 12$

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3. Regla de Sarrus:

Los términos están formados por productos de tres elementos de la matriz, siguiendo esta regla:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}}^{\text{delante +}} \overbrace{- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}}^{\text{delante -}}$$

Ejemplos:

a) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \cdot 0 =$$

$$= 0 + 5 - 24 - 140 - 9 + 0 = 5 - 173 = -168$$

b) $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot a + 1 \cdot (-1) \cdot (-5) + 4 \cdot 1 \cdot 1 - (-5) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot a =$$

$$= -3a + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = -7a + 7$$

Observaciones:

*** Un determinante es un número.**
*** Los determinantes se escriben entre barras para diferenciarlos de las matrices.**
*** Sólo tienen determinante las matrices cuadradas.**
*** Las matrices que no son cuadradas no tienen determinante.**
*** Cuando se desarrolla un determinante, en cada uno de los sumandos interviene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna.**

2. Propiedades de los determinantes.

Las siguientes propiedades se verifican para determinantes de cualquier orden, aunque en los ejemplo sólo vamos a trabajar con determinantes de orden 3.

Cuando nos referimos a líneas de un determinante nos estamos refiriendo tanto a filas como a columnas.

1.- El determinante de una matriz coincide con el determinante de su transpuesta: $|A| = |A^t|$

Es decir, si en un determinante cambiamos las filas por columnas el determinante no varía:

Veamos la propiedad para determinantes de orden 2:

$$\left.\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \\ |A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{array}\right\} \rightarrow |A| = |A^t|$$

2.- Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna formada por ceros, su determinante es cero.

Vemos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \overbrace{2 \cdot 0 \cdot 8}^{=0} + \overbrace{0 \cdot 6 \cdot 7}^{=0} + \overbrace{1 \cdot 0 \cdot 9}^{=0} - \overbrace{7 \cdot 0 \cdot 9}^{=0} - \overbrace{2 \cdot 0 \cdot 6}^{=0} - \overbrace{1 \cdot 0 \cdot 8}^{=0} = 0$$

<u>Justificación:</u> En cada sumando aparece un elemento de cada fila y un elemento de cada columna, por ello si una línea (fila o columna) está formada por ceros, en todos los sumandos aparecerá un cero, ya que en todos los sumandos aparecerá un elemento de esa línea.

3.- Si se permutan dos líneas paralelas entre sí el determinante cambia de signo.

Vemos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0+21+2-0-9-1 = 23-10 = 13$$

Permutamos las dos primeras filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+9+0-2-21-0 = 10-23 = -13$$

Justificación: En el desarrollo se obtienen los mismos sumandos pero con distinto signo.

4.- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es cero.

Vemos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3+63-7-(-7)-63-3 = 3+63-7+7-63-3 = 0$$

Justificación: Si la matriz A tiene dos líneas iguales, al permutarlas se vuelve a obtener la matriz A, pero el determinante cambia de signo:

$$|A| = -|A| \rightarrow |A| + |A| = 0 \rightarrow 2 \cdot |A| = 0 \rightarrow |A| = 0$$

5.- Si multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por ese mismo número.

Vemos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9+42-5-(-7)-45-6 = 9+42-5+7-45-6 = 58-56 = 2$$

Multiplicamos por *k*, por ejemplo, la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7k \\ 2 & 1 & 5k \\ -1 & 3 & 3k \end{vmatrix} = 9k + 42k - 5k - (-7k) - 45k - 6k = (9 + 42 - 5 + 7 - 45 - 6)k =$$
$$= (58 - 56)k = 2k$$

Se obtienen los mismos sumandos multiplicados por *k*, por tanto se puede sacar factor común.

Justificación: como en todos los sumandos interviene un elemento de cada fila y cada columna, en todos los sumandos aparece un elemento multiplicado por *k*, y por tanto todos los sumandos aparecen multiplicados por *k*.

6.- Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales el determinante vale cero:

En el siguiente determinante son proporcionales la primera y la tercera fila, vemos que es cero usando las dos propiedades anteriores.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3k & -k & 7k \end{vmatrix} \overset{P5}{=} k \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} \overset{P4}{=} k \cdot 0 = 0$$

7.- Si en un determinante una línea (fila o columna) está descompuesta en sumas, podemos descomponer el determinante en suma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a+b & c+d & e+f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & c & e \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b & d & f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8.- Si a una línea le sumamos otra línea paralela multiplicada por una constante, el determinante no varía:

Vemos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 6 + 45 - 9 - (-5) - 42 = -7 + 6 + 45 - 9 + 5 - 42 = 56 - 58 = -2$$

A la tercera fila le sumamos la primera fila multiplicada por 3: $f_3 \to f_3 + 3f_1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 16 \end{vmatrix} = -16+60+0-0-(-50)-96 = -16+60+50-96 = 110-112 = -2$$

El valor del determinante no ha variado.

Veamos esta propiedad con "letras"

Sea el determinante: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, a la 1ª fila le sumamos la segunda multiplicada por k, es decir: $f_1 \to f_1 + k \cdot f_2$, vemos que el determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} a+kd & b+ke & c+kf \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{P7}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \overbrace{\begin{vmatrix} kd & ke & kf \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}^{\substack{\text{es igual a cero} \\ \text{dos filas proporcionales}}} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

9.- Si un determinante tiene una línea (fila o columna) que es combinación lineal de otras líneas paralelas, el determinante es cero, y también recíprocamente si el determinante de una matriz es cero entonces una fila (y una columna) es combinación lineal de las demás.

Supongamos que la tercera fila es combinación lineal de la primera y segunda fila:

$f_3 = k \cdot f_1 + m \cdot f_2$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka+md & kb+me & kc+mf \end{vmatrix} \overset{P7}{=} \overbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix}}^{\substack{\text{es cero} \\ \text{dos filas son proporcionales} \\ \text{la primera y la tercera}}} + \overbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ md & me & mf \end{vmatrix}}^{\substack{\text{es cero} \\ \text{dos filas son proporcionales} \\ \text{la segunda y la tercera}}} = 0+0=0$$

Veamos un ejemplo de la implicación contraria:

Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 14-6-6-24+1+21 = 36-36 = 0$, entonces:

Una fila debe ser combinación lineal de las restantes, en efecto observamos que $f_3 = 3f_1 + f_2$

Además una columna debe ser combinación lineal del resto, efectivamente: $c_3 = c_1 - c_2$

El determinante de una matriz cuadrada es un detector de combinaciones lineales en las filas y columnas de la matriz. Si el determinante es cero forzosamente a una fila (y una columna) que es combinación lineal del resto.

10.- Si en un determinante sustituimos una línea (fila o columna) por una combinación lineal de ella misma y de una línea paralela, el determinante queda multiplicado por el coeficiente de la línea que sustituimos.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

En este determinante vamos a sustituir la 2ª fila por $3f_1+5f_2$, es decir: $f_2 \to 3f_1+5f_2$

Obtenemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+5d & 3b+5e & 3c+5f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{P7}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{dos filas proporcionales}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5d & 5e & 5f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\substack{\text{5 multiplica a la 2ª f} \\ \text{lo podemos sacar fuera} \\ \text{multiplicando}}} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

11.- El determinante de un producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes:

$$\underbrace{|A \cdot B|}_{\substack{\text{es el determinante de} \\ \text{un producto} \\ \text{de dos matrices}}} = \underbrace{|A| \cdot |B|}_{\substack{\text{es un producto} \\ \text{de dos determinantes}}}$$

Vemos un ejemplo:

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

Para calcular $|A \cdot B|$, primero hacemos el producto de matrices y después calculamos el determinante,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+3+6 & -1+9 & -7+3+3 \\ 6+1+10 & 2+15 & 14+1+5 \\ 9+1+14 & 3+21 & 21+1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 17 & 17 & 20 \\ 24 & 24 & 29 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 17 & 17 & 20 \\ 24 & 24 & 29 \end{vmatrix} = 6 \cdot 17 \cdot 29 - 1 \cdot 17 \cdot 24 + 8 \cdot 20 \cdot 24 + 17 \cdot 24 - 6 \cdot 20 \cdot 24 - 8 \cdot 17 \cdot 29 =$$

$$= 2958 \underbrace{-408} + 3840 + \underbrace{408} - 2880 - 3944 = 6798 - 6824 = -26$$

Calculamos $|A| \cdot |B|$, para ello calculamos los determinantes por separado y después multiplicamos los resultados:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -2$$, según se vio al explicar la propiedad 8.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 13$$, según se vio al explicar la propiedad 3.

Por tanto: $|A| \cdot |B| = -2 \cdot 13 = -26$.

Luego hemos comprobado con un ejemplo, que para matrices cuadradas, se verifica la igualdad: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Análogamente si *A*, *B*, *C*,…*H* son matrices cuadradas de orden n:

$$\underbrace{|A \cdot B \cdot C \cdot \ldots \cdot H|}_{\text{Determinante del producto}} = \underbrace{|A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot \ldots \cdot |H|}_{\text{Producto de los determinantes}}.$$

El determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes.

¿Si *A* es una matriz cuadrada, qué relación existe entre $|A|$ y $|A^n|$?

Usamos la propiedad anterior:

$$|A^n| = |A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A| = \overbrace{|A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot \ldots \cdot |A|}^{n-factores} = |A|^n \rightarrow \boxed{|A^n| = |A|^n}$$

¿Qué relación existe entre el determinante de una matriz cuadrada y el determinante de su matriz inversa?

Sea A una matriz cuadrada de orden n, sea A^{-1} su matriz inversa:

$\rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n \rightarrow$ tomando determinantes: $\rightarrow \underbrace{|A \cdot A^{-1}|}_{|A| \cdot |A^{-1}|} = |I_n| = 1$.

Hemos visto anteriormente que el determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes, por tanto: $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$ y que el determinante de la matriz unidad es 1.

Por tanto: $\boxed{|A| \cdot |A^{-1}| = 1}$

Ejemplos:

si $|A| = 3 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$, si $|B| = -5 \rightarrow |A^{-1}| = -\frac{1}{5}$, si $|C| = -\frac{2}{3} \rightarrow |A^{-1}| = -\frac{3}{2}$

3. Menor complementario y adjunto de un elemento.

Submatriz de una matriz.

Sea *A* una matriz cualquiera, una submatriz de *A*, es una matriz que se forma a partir de los elementos de A, suprimiendo filas y columnas:

Ejemplos: Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ -8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

No es una submatriz $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, ya que no se puede obtener de A tachando filas y columnas:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ -8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

En cambio si es una submatriz $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ya que se obtiene al suprimir: f_3, f_4 y c_3

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ -8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Menor de una matriz.

Sea *A* una matriz cualquiera, un menor de *A*, es un determinante de una submatriz matriz cuadrada de *A*.

En la matriz anterior:

Los siguientes menores, son algunos menores de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}, \dots$$

Los siguientes menores, son todos los menores de orden 3 de *A*:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -8 & 1 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ -8 & 1 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ -8 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Menor complementario de un elemento de una matriz cuadrada.

Sea A una matriz cuadrada, el menor complementario del elemento a_{ij}, es el menor que resulta al suprimir la fila *i* y la columna *j*:

Es decir se calcula el determinante de la submatriz que resulta al suprimir la fila y la columna donde se encuentra el elemento:

Ejemplos: Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -8 & 7 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

El menor de $a_{11}=-1$ es: $\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ ya que en la matriz hay que tachar la primera fila y la primera columna.	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -8 & 7 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
El menor de $a_{23}=7$ es: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$ ya que en la matriz hay que tachar la segunda fila y la tercera columna.	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -8 & 7 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
El menor de $a_{22}=-8$ es: $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$ ya que en la matriz hay que tachar la segunda fila y la segunda columna.	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -8 & 7 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Sea $B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

El adjunto de $b_{21}=2$ es 5, ya que en la matriz hay que tachar la segunda fila y la primera columna.	$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
El adjunto de $b_{22}=3$ es -1, ya que en la matriz hay que tachar la segunda fila y la segunda columna.	$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Adjunto de un elemento de una matriz cuadrada.

Sea A una matriz cuadrada, se llama adjunto del elemento a_{ij} a su menor complementario precedido del signo: $(-1)^{i+j}$. El adjunto del elemento a_{ij} se representa por A_{ij}.

Ejemplos:

Sea $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}$.

A_{12} es el adjunto del elemento $a_{12}=4\rightarrow A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-1\cdot(14-12)=-2$, el menor $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 7\end{vmatrix}$ se obtiene al suprimir en A f_1 y c_2.

A_{31} es el adjunto del elemento $a_{31}=3\rightarrow A_{31}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}=+1\cdot(16-0)=16$, el menor $\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}$ se obtiene al suprimir en A f_3 y c_1.

Sea $B=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

B_{21} es el adjunto del elemento $b_{21}=4\rightarrow B_{21}=(-1)^{1+2}\cdot 7=-7$, que se obtiene al suprimir en B f_2 y c_1 y multiplicar por -1.

B_{22} es el adjunto del elemento $b_{22}=6\rightarrow B_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-2)=+1\cdot(-2)=-2$, que se obtiene al suprimir en B f_2 y c_2 y multiplicar por +1.

Sea $C=\begin{pmatrix}3 & 7 & -3 & 11\\ 4 & 2 & 0 & 7\\ 4 & 6 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 6 & 5\end{pmatrix}$

C_{34} es el adjunto del elemento:

$$c_{34}=2\rightarrow C_{34}=(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}3 & 7 & -3\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 6\end{vmatrix}=-1\cdot(36-36+0-0-0-168)=+168.$$

El determinante se obtiene al suprimir en la matriz C f_3 y c_4.

4. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.

Vamos a estudiar una nueva propiedad de los determinantes, que nos será muy útil cuando se trate de calcular determinantes de orden mayor que 3.

12.- Un determinante se puede calcular multiplicando los elementos de una línea (fila o columna) por sus adjuntos y después sumando los resultados.

Ejemplos:

Sea el determinante: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Primero vamos a calcular $|A|$ usando la Regla de Sarrus, y posteriormente desarrollando por adjuntos en la 2ª fila, por último desarrollaremos por adjuntos en la 3ª columna.

Primero usamos la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3+16-18-4 = 16-25 = -9$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overbrace{-2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} + 3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=-1-6=-7} - 4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=-4}}^{\text{Cada elemento de la 2ª fila se multiplica por su adjunto}} = -2\cdot 2+3(-7)-4(-4)$$

$$= -4-21+16 = -25+16 = -9$$

Desarrollamos por último por adjuntos en la 3ª columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overbrace{+3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=-6} - 4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=-4} + 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{=-3-4=-7}}^{\text{cada elemento de la 3ª columna se multiplica por su adjunto}} = 3(-6)-4(-4)+1(-7) =$$

$$= -18+16-7 = -25+16 = -9$$

Este procedimiento es el que deberemos usar cuando tengamos que calcular un determinante de orden superior a 3.

$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ Tenemos que desarrollar por adjuntos, ¿Qué línea escogemos? La que tenga más ceros, ya que así nos evitamos operaciones, veámoslo:

La línea del determinante que tiene más ceros es la 2ª columna, por tanto desarrollamos por adjuntos en la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{42} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Por ello, sólo hay que calcular un determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot (252 + 16 - 21 - 16 - 49 + 108) =$$

$$-7 \cdot (252 + 16 - 21 - 16 - 49 + 108) = -7 \cdot (360 - 70) = -7 \cdot 290 = -2030$$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ Primero nos fijamos en la línea que tiene mas ceros: es la 4ª fila.

El determinante lo vamos a hacer de dos formas:
<u>1ª forma:</u> desarrollando por adjuntos en la 4ª fila, recuerda:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2(-5 + 24 - 12 + 9 - 8 + 20) + 2(24 - 3 + 9 - 2) = -2(53 - 25) + 2(33 - 5) =$$

$$= -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$$

2ª forma: vamos a hacer "ceros en la última fila"

Para hacer ceros en la última fila operamos con columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_4 \to c_4 - c_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Hemos conseguido un nuevo cero en la 4ªfila, desarrollamos por adjuntos en esa fila, tendremos que calcular sólo un determinante de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5 - 9 - 6 + 20) = -2(-20 + 20) = 0$$

Importante:

Hasta ahora hemos hecho ceros:

1º) Para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
2º) Para calcular el rango de una matriz.
3º) Para facilitar el cálculo de determinantes.

Éste último caso, es diferente de los dos anteriores, tenemos que tener en cuenta estas indicaciones:

*** tenemos que tener en cuenta: la Propiedad 10.- Si en un determinante sustituimos una línea (fila o columna) por una combinación lineal de ella misma y de una línea paralela, el determinante queda multiplicado por el coeficiente de la línea que sustituimos.**

*** Nos interesan filas con ceros y con unos.**

*** Para hacer ceros en columnas opero con filas y para hacer ceros en filas trabajo con columnas.**

*** Si deseo, por comodidad hacer ceros siempre en columna, como lo hemos hecho hasta ahora, basta tener en cuenta la Propiedad 1:** $|A| = |A^t|$ **.**

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$ Vamos a hacer ceros en la 2ª columna, lo vamos hacer de dos formas:

1ª forma dejamos fija la 1ª fila y operamos con ella para hacer ceros en las demás:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$ fija

hacemos ceros

Para hacer cero "1": $f_3 \to -4f_3 + f_1$, pero por la propiedad 10, al multiplicar la fila 3ª por (-4), el determinante ha quedado multiplicado por (-4), por tanto para que el determinante no varíe debemos dividirlo por (-4)

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \; f_3 \to -4f_3 + f_1 \; = \frac{1}{-4} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -13 & 0 & -23 & -35 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{-4} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -13 & 0 & -23 & -35 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Para hacer cero el "7" usando la primera fila: $f_4 \to -4f_4 + 7f_1$, como he multiplicado por (-4) la fila que sustituyo, el determinante lo tengo que dividir por (-4)

$$\frac{1}{-4} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -13 & 0 & -23 & -35 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \; f_4 \to -4f_4 + 7f_1 \; = \frac{1}{-4} \cdot \frac{1}{-4} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -13 & 0 & -23 & -35 \\ 53 & 0 & -1 & 31 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por adjuntos en la 2ª columna, recordamos la regla de los signos:

$$\frac{1}{16} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -13 & -23 & -35 \\ 53 & -1 & 31 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4}(-1426 + 39 - 11130 + 3657 - 70 + 2418) =$$

$$\frac{-1}{4}(6114 - 12626) = \frac{-1}{4} \cdot (-6512) = 1628$$

2ª forma dejamos fija la 3ª fila, que es donde tenemos el "1" y operamos con ella para hacer ceros en las demás:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \text{fija}$$

hacemos ceros

Para hacer cero "4": $f_1 \to f_1 - 4 \cdot f_3$ como la fila que hemos sustituido (f_1) no la hemos multiplicado por ningún número el determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 \to f_1 - 4f_3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -13 & 0 & -23 & -35 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Para hacer cero "7", $f_4 \to f_4 - 7f_3$, como la fila que hemos sustituido (f_4) no la hemos multiplicado por ningún número el determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} -13 & 0 & -23 & -35 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ f_4 \to f_4 - 7f_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -13 & 0 & -23 & -35 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -36 & 0 & -40 & -69 \end{vmatrix}$$

Ahora desarrollamos por adjuntos en la 3ª columna, recordando la regla de los signos:

$$\begin{vmatrix} -13 & 0 & -23 & -35 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -36 & 0 & -40 & -69 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & -23 & -35 \\ 2 & 6 & 3 \\ -36 & -40 & -69 \end{vmatrix} = -1(5382 + 2800 + 2484 - 7560 - 1560 - 3174)$$

$$= -1(10666 - 12294) = -1(-1628) = 1628$$

En resumen:

Si hacemos la sustitución $f_n \to af_n + bf_m$, tenemos que dividir por *a* el determinante.

Si hacemos la sustitución $f_n \to f_n + bf_m$, el determinante no varía

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Nos interesa una línea que tenga ceros y unos, elegimos la fila cuarta, tendremos que hacer ceros en esta fila, nosotros estamos acostumbrados a hacer ceros en columna, para ello vamos a calcular el determinante de la matriz transpuesta ya que: $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ \boxed{-5 \quad 7 \quad 5 \quad 1} \\ 2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 27 & 12 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 \to f_1 - 5f_2 \\ \\ \\ f_4 \to f_4 - 6f_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 28 & -31 & -24 & 0 \\ \boxed{-5 \quad 7 \quad 5 \quad 1} \\ 2 & 8 & 3 & 0 \\ 32 & -15 & -18 & 0 \end{vmatrix} =$$

Desarrollamos por adjuntos en la cuarta columna, teniendo en cuenta la regla de los signos:

$$\begin{vmatrix} 28 & -31 & -24 & 0 \\ \boxed{-5 \quad 7 \quad 5 \quad 1} \\ 2 & 8 & 3 & 0 \\ 32 & -15 & -18 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 28 & -31 & -24 \\ 2 & 8 & 3 \\ 32 & -15 & -18 \end{vmatrix}$$

Podemos sacar factor común “3” en la tercera columna y factor común “2” en la primera:

$$= 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 14 & -31 & -8 \\ 1 & 8 & 1 \\ 16 & -15 & -6 \end{vmatrix} = 6(-672 + 120 - 496 + 1024 + 210 - 186) = 6(1354 - 1354) = 0$$

Observaciones:

1º) El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos que están en la diagonal principal.

Si la matriz es cuadrada de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = a \cdot b - 0 \cdot 0 = ab$$

Si la matriz es cuadrada de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$ Usamos la regla de Sarrus.

Si la matriz es cuadrada de orden 4:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

Hemos desarrollado por adjuntos en la 1ª fila, como

$$\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = bcd \rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$$

y así sucesivamente:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix} = abcde$$

2º) Sea I_n la matriz unidad de orden *n*, su determinante vale 1, $|I_n| = 1$.

$$|I_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ |I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ |I_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ldots$$

ya que se son matrices diagonales.

5. Cálculo de la matriz inversa.

Sea A una matriz cuadrada de orden *n*, con determinante no nulo $\left(|A| \neq 0\right)$, entonces la matriz A tiene inversa y viene dada por la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t$.

Representamos por $Adj(A)$ a la matriz que resulta al sustituir en A cada elemento por su adjunto.

Si A es una matriz cuadrada de orden 2 con determinante no nulo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^t$$

Si A es una matriz cuadrada de orden 3 con determinante no nulo:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^t$$

Si el determinante de una matriz cuadrada es cero, entonces la matriz no tiene inversa

Ejemplos

Dada $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1}.

Primero se calcula $|A|$, ya que si $|A|=0$ entonces la matriz no tiene inversa.

$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3-8=-11\neq 0 \rightarrow$ la matriz A tiene inversa.

Calculamos la matriz adjunta: $Adj(A)$

$$\begin{matrix} A_{11}=+3 & A_{12}=-2 \\ A_{21}=-4 & A_{22}=+(-1)=-1 \end{matrix} \quad \rightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=\frac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3/11 & 4/11 \\ 2/11 & 1/11 \end{pmatrix}$ que es la inversa de A

Podemos comprobar si efectivamente es la inversa para ello calculamos $A\cdot A^{-1}$, nos tiene que salir la matriz unidad de orden 2: $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3/11 & 4/11 \\ 2/11 & 1/11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{11}+\frac{8}{11} & -\frac{4}{11}+\frac{4}{11} \\ \frac{-6}{11}+\frac{6}{11} & \frac{8}{11}+\frac{3}{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11/11 & 0 \\ 0 & 11/11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ calculamos A^{-1}.

Antes que nada calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix}=+5+6+3-15=-1\neq 0$

$A_{11}=+\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-15$	$A_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-(3+6)=-9$	$A_{13}=+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-5$
$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-(3+5)=$ $=-8$	$A_{22}=+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-3-2=$ -5	$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-(5-2)=-3$
$A_{31}=+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3$	$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-(3-1)=-2$	$A_{13}=+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$

Por tanto la matriz $Adj(A)=\begin{pmatrix}-15 & -9 & -5\\ -8 & -5 & -3\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}\rightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix}-15 & -8 & -3\\ -9 & -5 & -2\\ -5 & -3 & -1\end{pmatrix}$

Aplicando la fórmula de la inversa:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-15 & -8 & -3\\ -9 & -5 & -2\\ -5 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 8 & 3\\ 9 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobamos que efectivamente es la inversa, para ello calculamos $A\cdot A^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15 & 8 & 3\\ 9 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-9-5 & 8-5-3 & 3-2-1\\ -15+15 & -8+9 & -3+3\\ -30+45-15 & -16+25-9 & -6+10-3\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6. Cálculo del rango de una matriz usando determinantes.

En esta pregunta vamos a dar otro procedimiento para el cálculo del rango de una matriz, lo vamos hacer usando determinantes.

Recordamos que el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes, es decir que no son combinación lineal.

Antes que nada, recordamos la propiedad 9 de los determinantes:

9.- Si un determinante tiene una línea (fila o columna) que es combinación lineal de otras líneas paralelas, el determinante es cero, y también recíprocamente si el determinante de una matriz es cero entonces una fila (y una columna) es combinación lineal de las demás.

Es decir:

El determinante de una matriz cuadrada es un detector de combinaciones lineales en las filas y columnas de la matriz. Si el determinante es cero forzosamente una fila (y una columna) del determinante es combinación lineal del resto.

Siendo *A* una matriz cuadrada:

Si $\lvert A\rvert = 0 \leftrightarrow$	**Una fila (y una columna) es combinación del resto, las filas y las columnas del determinante son linealmente dependientes.**
Si $\lvert A\rvert \neq 0 \leftrightarrow$	**No existen combinaciones lineales entre las filas (y las columna) de A, las filas y las columnas del determinante son linealmente independientes.**

Observación importante:

Si en una matriz un menor es distinto de cero, entonces las filas y columnas de la matriz que forman el menor son linealmente independientes.

Ejemplos:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$	Si $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, entonces: * f_2 y f_3 son linealmente independientes. * c_2 y c_3 son linealmente independientes. Por tanto: $rg(A) \geq 2$, como máximo $rg(A) = 5$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} & a_{35} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$	Si $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$, entonces: * f_3 y f_4 son linealmente independientes. * c_1 y c_4 son linealmente independientes. Por tanto: $rg(A) \geq 2$, como máximo $rg(A) = 5$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{34}} & a_{35} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & \boxed{a_{43}} & \boxed{a_{44}} & a_{45} \\ a_{51} & \boxed{a_{52}} & \boxed{a_{53}} & \boxed{a_{54}} & a_{55} \end{pmatrix}$	Si $\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} \neq 0$ * f_3, f_4 y f_5 son linealmente independientes. * c_2, c_3 y c_4 son linealmente independientes. Por tanto: $rg(A) \geq 3$, como máximo $rg(A) = 5$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{24}} & \boxed{a_{25}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{34}} & \boxed{a_{35}} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & \boxed{a_{44}} & \boxed{a_{45}} \\ \boxed{a_{51}} & a_{52} & \boxed{a_{53}} & \boxed{a_{54}} & \boxed{a_{55}} \end{pmatrix}$	Si $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \neq 0$ * f_2, f_3, f_4 y f_5 son linealmente independientes. * c_1, c_3, c_4 y c_5 son linealmente independientes. Por tanto: $rg(A) \geq 4$, como máximo $rg(A) = 5$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$	Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \neq 0$ Todas las fila son linealmente independientes y todas las columnas también, aseguramos que $rg(A)=5$

Es falso que si un menor es cero, las filas y columnas de la matriz que forman el menor sean combinación lineal.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0$ sólo podemos deducir que las dos filas del menor $(1 \quad 0)$ y $(3 \quad 0)$ son combinación lineal una de otra. No podemos deducir nada sobre las filas de la matriz, es decir sobre: $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$ y $(3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)$.

Vemos algunos resultados que nos servirán para calcular el rango de una matriz usando determinantes:

1º) Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ Si todos los menores de 2º orden que pueda hacer con la 2ª fila orlando al elemento a_{11} son todos nulos, entonces la 2ª fila es combinación lineal de la primera y la podemos suprimir para calcular el rango.		
$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \boxed{a_{14}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$ y además $\rightarrow$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=0$ y además $\rightarrow$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}=0$

En este caso f_2 es combinación lineal de f_1 .

Basta con que uno de los menores anteriores sea distinto de cero para que las filas sean linealmente independientes (no son c.l.) $\rightarrow$ $rg(A)\geq 2$ ya que al menos hay dos filas linealmente independientes.

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, ó $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, ó $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow f_1$ y f_2 son indep $\rightarrow rg(A) \geq 2$

Supongamos que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ y todos los menores de tercer orden que podemos hacer orlando con la 3ª fila son todos nulos, entonces f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2.

$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}} & a_{14} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{31} & a_{32} \end{matrix}} & & a_{24} \\ & & a_{34} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & a_{13} & \boxed{\begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{31} & a_{32} \end{matrix}} & a_{23} & \\ & a_{33} & \end{pmatrix}$
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ y además $\rightarrow$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = 0$

En este caso f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2, y como f_1 y f_2 son independientes, ya que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\rangle \textit{Independientes} \\ \text{—} \textit{Comb. lineal de } f_1 \textit{ y } f_2 \end{matrix} \qquad \rightarrow rg(A) = 2$$

Para calcular el rango usando menores:

*** Seleccionar un menor de orden 2 no nulo (si esto no es posible $\rightarrow rg(A) = 1$, y ya hemos acabado)**

*** Calcular los menores de orden 3 que se pueden formar orlando el menor anterior con los elementos de una fila, se pueden dar dos casos:**

- Encuentro un menor de orden 3 no nulo. ($\rightarrow rg(A) \geq 3$) En este caso se pasa a orlar con los elementos de otra fila y calcular los menores de orden 4.

- Todos los menores de orden 3 que se forman al orlar el menor de orden 2 con los elementos de la fila son nulos, entonces la fila es combinación lineal de las filas que forman el menor y por tanto la podemos suprimir, pasamos a orlar el menor de orden 2 con los elementos de otra fila.

Y así sucesivamente hasta que no me quede ninguna fila.

Ejemplos:

1) Calcular usando menores el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Primero buscamos un menor de orden 2 no nulo:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Las dos primeras filas son independientes $\rightarrow rg(A) \geq 2$

Orlamos el menor con los elementos de la 3ª fila, lo hacemos ordenadamente:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 10 - 9 - 1 = 0$, como sale igual a cero orlamos con la 3ª fila y 4ª columna:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 18 + 15 - 2 = 20 - 20 = 0$, como sale igual a cero seguimos orlando con la 3ª fila y 5ª columna:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -27 + 30 - 3 = 0$, también sale igual a cero. Como todos los posibles menores que puedo formar al orlar el menor con los elementos de la 3ª fila son todos nulos esto me indica que la fila 3ª es combinación lineal de las filas que forman el menor es decir de las dos primeras filas.

Por ello la podemos suprimir en el cálculo del rango.

Seguimos orlando nuestro menor con la cuarta fila:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Es c.l. de la 1ªf y 2ªf	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = -20+9+11=0$, como sale igual a cero seguimos orlando con la 4ª fila y 4ª columna:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Es c.l. de la 1ªf y 2ªf	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 11 & 5 \end{vmatrix} = -25+18-15+22=40-40=0$, como sale igual a cero seguimos orlando con la 4ª fila y 5ª columna:

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Es c.l. de la 1ªf y 2ªf	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -30+27-30+33=60-60=0$, también sale igual a cero. Como todos los posibles menores que puedo formar al orlar el menor con los elementos de la 4ª fila son todos nulos esto me indica que la fila 4ª también es combinación lineal de las filas que forman el menor es decir de las dos primeras filas.

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{3} & \cancel{11} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \end{pmatrix}$ Es c.l. de la 1ªf y 2ªf / Es c.l. de la 1ªf y 2ªf	Las dos primeras filas son independientes ya que contienen un menor de orden 2 no nulo. f_3 es comb. lineal de f_1 y f_2. f_4 es comb. lineal de f_1 y f_2.

Como $rg(A)=$ número de filas linealmente independientes, entonces $rg(A)=2$

2) Calcular el rango de $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Primero partimos de un menor de orden 2 distinto de cero:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ como el menor es distinto de cero, las dos primeras filas son linealmente independientes $\rightarrow rg(A) \geq 2$. Orlamos este menor con la tercera fila: (3ª fila y 3ª columna)

$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{matrix}} & 0 & -1\\ & 2 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix}0 & 0\end{matrix}} & 0 & 1 \\ 1 \quad 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$, seguimos orlando con la 3ª fila y 4ª columna:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} =$ Desarrollando por adjuntos en la tercera fila: $= +1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} = +1(-1) = -1 \neq 0 \rightarrow$ las tres primeras filas son linealmente independientes ya que se puede formar un menor de orden 3 no nulo, $\rightarrow rg(A) \geq 3$, orlamos este menor de orden 3 con la 4ª fila.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix} =$ Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila $= -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} =$Desarrollamos por adjuntos en la primera fila $= -1\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1\cdot(-2) = 2 \neq 0$

Como tenemos un menor de orden 4 no nulo, esto me indica que las filas que forman el menor son independientes, por tanto $rg(A) = 4$.

Calcular el rango de $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1\\ 5 & -1 & 10 & 2 & -3\end{pmatrix}$

Seleccionamos un menor de orden dos no nulo:

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1\\ 5 & -1 & 10 & 2 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 6 + 2 = 8 \neq 0 \rightarrow$ como el menor es distinto de cero, las dos primeras filas son linealmente independientes $\rightarrow rg(C) \geq 2$. Orlamos este menor con la tercera fila: (3ª fila y 3ª columna)

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 60-4-20-60+4+20=0$, como sale igual a cero seguimos orlando con la 3ª fila y 4ª columna:

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12-1-15+4=16-16=0$, como sale igual a cero seguimos orlando con la 3ª fila y 5ª columna:

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -18+1+10+15-2-6=26-26=0$, como sale igual a cero, y no podemos seguir orlando, deducimos que la fila 3ª es combinación lineal de las dos primeras: f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2.

Por tanto:

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ \cancel{5} & \cancel{-1} & \cancel{10} & \cancel{2} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$ f_1 y f_2 son independientes. f_3 es comb. lineal de f_1 y f_2	Como el rango es el número de filas o columnas linealmente independientes, concluimos: $rg(C)=2$

Una vez realizados los ejercicios anteriores, podemos afirmar:

El rango de una matriz es el orden del menor de mayor orden no nulo.

Por lo general: cuando tenemos que estudiar el rango de una matriz en la que aparecen parámetros *a, b, c,…m, n,…,*es preferible calcular el rango usando determinantes, a usar el método de Gauss.