Álgebra y Geometría Analítica: Práctica 2

Polinomios

(basadas en las prácticas de la Prof. Gisela Savslasky y el Prof. Ernesto Aljinovic)

Profesora: Cecilia Jarne

1. Realiza las operaciones indicadas con los siguientes polinomios: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, $q(x) = 2x^4 - x + 3$, $r(x) = -x^2 + x + 2$.
   a) $p(x) + 2q(x) - r(x)$
   b) $p(x)(q(x) + r(x))$
   c) $p(x) - r(x)q(x)$
   d) $r^2(x)$

2. Si $x^3 + x^2 + kx + k + 3 = (x + 2)(x^2 – x + 1)$, ¿Cuánto vale k?

3. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios no nulos de grados n y m respectivamente.

   a) Muestra con ejemplos que el grado del producto $p(x)q(x)$ es la suma de los grados.

   b) Muestra con ejemplos que si la suma $p(x) + q(x)$ es no nula, su grado es menor o igual que el $max(n, m)$.

4. Halla el cociente y el resto de las divisiones:

   a) $(x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 1) : (x^2 - 1)$
   b) $(3x^6 + x^5 - x^3 - 3) : (x^2 - x + 2)$
   c) $(x^6 + x^5 + x^3 - x^2 - 3) : (x - 1)$

   Para los resultados obtenidos, escribirlos como: $\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ y como $P(x) = Q(x)A(x) + R(x)$ con $gr(R) < gr(Q)$ o $R(x) = 0$.

5. Evalua el polinomio $p(x) = -x^3 + 2x + 1/2$ en 2; -1; $t + 2$

6. Al evaluar el polinomio $x^2 - kx + 1$ en -1 obtenemos -2. ¿Cuánto vale k?

7. ¿Cuál es el resto de la división $(x^3 – x + 2) : (x + 1)$?

8. Al dividir $(x^4 + kx^2 + 1) : (x - 1)$ obtenemos resto -1. ¿Cuánto vale k?

9. Sin efectuar la división, averigua si el polinomio $5x^3 – 14x + 3$ es divisible por $x - 2$ y justifica la respuesta.

10. Demuestra que $x - 1$ es factor de $x^5 – 1$ y de $x^6 - 1$. Halla los cocientes.

11. Demuestra que $x + 1$ es factor de $x^5 + 1$, pero no es factor de $x^6 + 1$. Efectua las divisiones.

12. ¿Para qué valores de k el número -1 es raíz del polinomio $x^3 + kx^2 – (k + 1)x + 1$?

13. ¿Para qué valores de r y t el polinomio $x^4 + rx^2 + tx - 2$ tiene a 1 y -2 como raíces?

14. Encuentra las raíces de $S(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y $T(x) = 2x^5 - 5x^3 + 2x$ en $R[x]$, y sus expresiones factorizadas. Hacerlo también en $Q[x]$.

15. Halla todas las raíces de los siguientes polinomios y factorízalos en $R[x]$ y en $C[x]$:

    a) $x^3 – x^3 - 2x$ b) $x^3 + x^2 – 4x – 4$ c) $x^4 – 4x^3 + 2x^2 + 8x – 8$ d) $2x^3 - 3x^2 – 8x – 3$ e) $2{,}5x^3 + x^2 + 0{,}6x + 0{,}1$ f)$x^4 + x^2 + 2x$ g) $x^5 + 2x^4 – x^3 – 5x^2 – 4x – 1$ h)$x^3 + x^2 – x + 2$

16. Hallar todas las raices con sus multiplicidades de:

a)$P(x) = x^3 - 1$
b) $P(x) = x^2 - 5x + 4$
c) $P(x) = x^2 + 4x + 5$
d) $P(x) = x^10 - 5x^5 + 4$
e) $P(x) = x^7 + 18x^6 + 81x^5$
f) $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
g) $P(x) = -2x^3 + 16x^2 - 30x$
h) $P(x) = 16x^4 - 81$
i) $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$
j) $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

17. ¿Cuál es el polinomio de grado mínimo que tiene a 1, 2, -3 por raíces y evaluado en -1 vale 3?

18. ¿Para qué valores de $a, b \in R$ es 1 una raíz doble de $x^3 + bx^2 - 3x + a$? Cuál es la otra raíz?

19. Verifica que $2 + i$ es una raíz de $(1 + i)x^2 – 7x + 15$

    a)¿Es el conjugado de $2 + i$ otra raíz?
    b)¿Contradice esto el teorema de raíces conjugadas?
    c)¿Cuál es la otra raíz?

20. Calcula las raíces de $x^2 + 2ix - 1$ y factorízalo.

21. Calcula las soluciones de la ecuación $z + z^{-1} = k$ para distintos valores de k.

22. Sabiendo que el polinomio $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 15x - 15$ tiene dos raíces reales de signos opuestos $\pm a$, halla todas sus raíces. (Sugerencia: dividir el polinomio por $x^2 - a^2$ y observar que el resto debe ser cero.)

23. a) Sean $p(x) = -x^3 + mx^2 – mx + 2$ y $q(x) = x + 1$. Halla el valor de m para que $q(x)$ sea factor de $p(x)$.
    b)Indica los valores de r y t para que $x^4 + rx^2 + t$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

24. Prueba que el polinomio $x^2 + 2x + 2$ divide a $P(X) = x^4 + 4$, y encuentra a partir de ello todas las raíces de $P(X)$ en $C[X]$, así como su expresión factorizada en $IR[X]$.

25. Dados los polinomios:

    $T(x) = x^3 - (2/5)x^2 + (1/2)x + 1$ y $S(x) = (1/2)x^4 - (1/2)x^3 - x^2 + x$

    a) ¿Cómo podrías aplicar el criterio de Gauss para encontrar las raíces racionales de esos polinomios? Para cada polinomio anota las raíces obtenidas con el criterio de Gauss.

    b) ¿Podemos asegurar que $T(x)$ tiene una raíz real? Enuncia el teorema que lo afirma.

    c) ¿Y en el caso de $S(x)$?

    d) ¿Sirve el criterio de Gauss para encontrar todas las raíces reales de un polinomio?

26. Sean $P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^3 + 2x$ y $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$
    a) Factoriza ambos polinomios en R[x] y halla su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.

    b) ¿Cuáles son sus factorizaciones en C[x]?

27. ¿Cuántos polinomios reales de grado 2 que tengan por raíces el 0 y el 1 hay? ¿Cuál es su expresión?

28. El polinomio $P(x)$ de coeficientes reales y grado 3, tiene a 1 y -1 por raíces.
    a)¿Puede asegurarse que la tercera raíz es también real?
    b) Si P(0) = 1, ¿cuál sería la tercera raíz de P ?

29. Halla el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ tenga a 1 por raíz.

30. Halla los coeficientes a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$

31. Resuelve la ecuación $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0$ sabiendo que $1 - i$ es una de las raíces del polinomio asociado.

32. Sea $P(x)$ un polinomio real de grado 6 que tiene a i y a $1 + i$ como raíces. Demostrar que no puede tener más de 2 raíces reales.

33. Expresa los siguientes polinomios reales como producto de polinomios irreducibles en $R[x]$ y en $C[x]$: $R(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 24$ y $Q(x) = x^6 - x$

34. ¿Qué grado puede tener como máximo un polinomio irreducible en $R[x]$? ¿Y en $C[x]$?