Integrales dobles

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes.

   a) $\displaystyle\int_0^x (2x-y)\,dy$

   b) $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{y}{x}\,dy$

   c) $\displaystyle\int_1^{2y} \frac{y}{x}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\cos y} y\,dx$

   e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\,dy$

   f) $\displaystyle\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (x^2+3y^2)\,dy$

   g) $\displaystyle\int_{e^y}^{y} \frac{y\ln x}{x}\,dx$

   h) $\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,dx$

   i) $\displaystyle\int_0^{x^3} ye^{-y/x}\,dy$

   j) $\displaystyle\int_y^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\cos y\,dx$

2. Utilizar una integral iterada para calcular el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

   a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$, $x=0$, $y=0$

   b) $y=x^{3/2}$, $y=2x$

   c) $2x-3y=0$, $x+y=5$, $y=0$

   d) $xy=9$, $y=x$, $y=0$, $x=9$

   e) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

   f) $y=x$, $y=2x$, $x=2$

3. Dibujar la región R y evaluar la integral iterada $\displaystyle\int_R\int f(x,y)\,dA$.

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (1+2x+2y)\,dy\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\cos^2 y\,dy\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^6\int_{y/2}^3 (x+y)\,dx\,dy$

   d) $\displaystyle\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dx\,dy$

   e) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,dy\,dx$

   f) $\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^0 e^{x+y}\,dx\,dy+\int_0^1\int_0^{1-y} e^{x+y}\,dx\,dy$

4. Dar una integral para cada orden de integración y utilizar el más conveniente para evaluar la integral en la región R.

   a) $\displaystyle\int_R\int xy\,dA$
   R: rectángulo $(0,0)$, $(0,5)$, $(3,5)$, $(3,0)$

   b) $\displaystyle\int_R\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\,dA$
   R: rectángulo $(-\pi,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi,\pi/2)$, $(-\pi,\pi/2)$

   c) $\displaystyle\int_R\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$
   R: triángulo acotado por $y=x$, $y=2x$, $x=2$

   d) $\displaystyle\int_R\int xe^y\,dA$
   R: triángulo acotado por $y=4-x$, $y=0$, $x=0$

   e) $\displaystyle\int_R\int -2y\ln x\,dA$
   R: región acotada por $y=4-x^2$, $y=4-x$

   f) $\displaystyle\int_R\int \frac{y}{1+x^2}\,dA$
   R: región acotada por $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $x=4$

   g) $\displaystyle\int_R\int x\,dA$
   R: sector circular en el primer cuadrante acotado por $y=\sqrt{25-x^2}$, $3x-4y=0$, $y=0$

   h) $\displaystyle\int_R\int (x^2+y^2)\,dA$
   R: semicírculo acotado por $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$

5. Dar una integral doble para hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones.

a) $z = xy, z = 0, y = x, x = 1$, primer octante

b) $y = 0, z = 0, y = x, z = x, x = 0, x = 5$

c) $z = 0, z = x^2, y = 0, y = 4, x = 0, x = 2$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

e) $x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$, primer octante

f) $y = 4 - x^2, z = 4 - x^2$, primer octante

g) $z = x + y, x^2 + y^2 = 4$, primer octante

h) $z = \dfrac{1}{1+y^2}$, $x = 0$, $x = 2$, $y \geq 0$

6. Evaluar la integal iterada. (Cambiar el orden de integración de ser necesario).

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\, dx\, dy$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx\, dy$

d) $\displaystyle\int_0^2 \int_{(x^2)/2}^{2} \sqrt{y} \cos y\, dy\, dx$

7. Una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias x e y en una función $f(x, y)$ que satisface las siguientes propiedades.

- $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dA = 1$
- $\displaystyle P[(x, y) \in R] = \int_R \int f(x, y)\, dA$

Mostrar que la función $f(x, y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta y hallar la probabilidad requerida.

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \texttt{en cualquier otro caso} \end{cases}$
$P(0 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 2)$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \texttt{en cualquier otro caso} \end{cases}$
$P(0 \leq x \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 2)$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{27}(9 - x - y) & 0 \leq x \leq 3,\ 3 \leq y \leq 6 \\ 0 & \texttt{en cualquier otro caso} \end{cases}$
$P(0 \leq x \leq 1 \wedge 4 \leq y \leq 6)$

d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \texttt{en cualquier otro caso} \end{cases}$
$P(0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq 1)$