

## Integrador

15 de febrero de 2018

1. Considerar el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$$

- Resolver con el método de Gauss.
  - Escribir el sistema en la forma matricial  $AX = B$ .
  - Determinar si  $A$  tiene inversa utilizando el determinante, y en caso de que la tenga, calcular la inversa.
  - Si en el punto anterior se determinó que  $A$  tiene inversa, calcular nuevamente el resultado, con ayuda de la inversa, si en cambio se determinó que no tiene inversa, calcular el rango de  $A \mid B$  y de  $A$  y determinar si el sistema tiene solución.
2. Demostrar que para todo  $x \in \mathbb{Z}$ , se tiene que  $2x \equiv 4 \pmod{2}$ .
3. Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de obtener exactamente 2 veces cara en esos 3 lanzamientos.
4. Considerar las siguientes estructuras:
- $(\mathbb{B}, \vee)$ , con  $\mathbb{B} = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$  y  $\vee$  la operación booleana OR.
  - $(\mathbb{Z}, +)$ .

Y la siguiente función  $f : (\mathbb{B}, \vee) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$  definida por:

$$f(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = \mathbf{F} \\ 1 & \text{si } b = \mathbf{V} \end{cases}$$

- Demostrar que  $(\mathbb{B}, \vee)$  es un monoide y  $(\mathbb{Z}, \vee)$  es un grupo.
  - Determinar si  $f$  es un homomorfismo de monoides (es decir: una función que conserva la operación binaria interna, entre dos monoides).
  - Determinar  $\text{Im}(f)$  y  $\text{ker}(f)$ , si corresponde.
  - Determinar si  $f$  es un monomorfismo de monoides, epimorfismo y/o isomorfismo.
5. Sea  $\mathcal{M}_2$  el conjunto de matrices cuadradas invertibles de tamaño  $2 \times 2$  a coeficientes reales, y se consideran la suma de matrices y el producto por escalar usuales.

Dadas las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinar si  $S = \{A, B, C\}$  es LI.
- Dar la dimensión de  $\langle S \rangle$ .
- Si la dimensión de  $\langle S \rangle$  es  $n$ , elegir  $n$  matrices de  $S$  y completar el sistema con otras matrices para obtener una base de  $\mathcal{M}_2$ .
- Dar una base de  $\langle S \rangle$  y dar las coordenadas de  $A$  en dicha base.