

Segundo Parcial

1. Sean $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, \mathcal{M}_2^{-1} el conjunto de matrices cuadradas invertibles de tamaño 2×2 y \cdot el producto usual de matrices. Consideramos la siguiente función

$$f : (\mathbb{Z}^*, \times) \rightarrow (\mathcal{M}_2^{-1}, \cdot)$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

- a) Determinar si f es un homomorfismo de grupos.
 - b) Determinar si f es un monomorfismo de grupos.
 - c) Determinar si f es un epimorfismo de grupos.
 - d) Determinar si f es un isomorfismo de grupos.
2. Sea $C = \{a, b\}$ y definimos las siguientes operaciones.

\star	a	b
a	a	b
b	a	b

\triangle	a	b
a	b	b
b	b	a

- a) Determinar si (C, \star) o (C, \triangle) forman alguna de las estructuras vistas en la materia.
 - b) Determinar si (C, \star, \triangle) o (C, \triangle, \star) forman un cuerpo.
3. Sea $\mathbb{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_2$ el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 cuyos coeficientes son los elementos del conjunto

$$\mathbb{Z}_2 = \{\pm 2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} = \{\dots, -64, -32, -16, -8, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$$

Determinar si \mathbb{M}_2 es un espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_2 con la suma de matrices y el producto por escalar de matrices.

4. Considerar los siguientes vectores del espacio vectorial \mathcal{M}_2 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar la dimensión y una base del subespacio engendrado por estas 3 matrices.
- b) Hallar las coordenadas de las tres matrices en la base elegida.
- c) Completar la base elegida en el punto 4a para que sea base de \mathcal{M}_2 .